DIDATTICA DELLE SCIENZE

Numero 60 del novembre 1975

Sommario

Fascicolo di 36 pagine più inserto redazionale.

Inserto

Ha inizio, da questo numero, l'inserto redazionale per l'annata 1975-1976, dedicato all'evoluzione dei metazoi. In questa prima parte l'autore, Salvatore Arcidiacono, che i nostri lettori hanno già avuto modo di conoscere e di apprezzare negli anni scorsi per la sua costante e qualificata collaborazione alla rivista, traccia una panoramica sull'*origine e i primi passi dell'evoluzione animale*. Partendo dalle primitive condizioni ambientali vengono esaminati prima i tentativi, per così dire, andati a vuoto, poi quelli destinati ad affermarsi, tramite l'esprimersi della polarità e del mesoderma, sotto la spinta dello stimolo alimentare, fino al concretizzarsi, nei primi animali, di un efficace sistema nervoso, ed al compiersi dell'importante processo della cefalizzazione.

In copertina

Larice *(Larix decidua)* nel Parco Nazionale del Gran Paradiso *(Fotocolor Cappelli)*.

Carlo Felice Manara

LE FIGURE NELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

1 - Pensiamo per un momento ad un esperimento ideale che ogni nostro lettore può immaginare di eseguire su un opportuno soggetto di sua conoscenza: questo esperimento potrebbe consistere nel domandare al soggetto (allievo, persona anche colta ma digiuna di matematica ecc.) la sua opinione sulle cartine che si trovano spesso negli orari ferroviari (v. fig. 1).

È abbastanza facile prevedere che la risposta più probabile sarà, più o meno, che quelle cartine sono « sbagliate ». Disponendo di un interlocutore abbastanza paziente, si potrebbe allora proseguire l'esperimento e domandare dove si trovano le cartine « giuste » che rappresentano l'Italia; anche in questo caso è abbastanza facile prevedere la risposta che le cartine giuste si trovano sugli atlanti geografici, e sarà facile giungere anche alla conclusione che una cartina è tanto più « giusta » quanto maggiore è la scala. Ma a questo punto il nostro lettore matematico può sfoggiare la sua competenza e introdurre il suo interlocutore nello stato della maggiore perplessità possibile dicendo che non esistono carte « giuste »; infatti la superficie terrestre non è applicabile sul piano e quindi ogni rappresentazione piana della superficie terrestre o di una sua porzione non può essere che « sbagliata ».

Rinunciamo a pensare ad una ulteriore prosecuzione di questo immaginario dialogo vagamente socratico; vorremmo arrestarci per un momento a questo punto, a questa situazione che è in certo senso analoga a quella che si incontra proprio nei dialoghi di Socrate, quando egli ha messo in difficoltà gli interlocutori, che non sanno più che cosa rispondere. Sta di fatto che questo esperimento immaginario, che riguarda una scienza che potremmo dire concreta come la geografia, ci conduce a meditare su un problema vecchio di secoli ma che — a nostro parere — conserva sempre la sua rilevanza in rapporto alla didattica. Vogliamo dire del problema del significato delle figure in geometria. Non vi è alcun dubbio sul fatto che questa scienza non riguarda oggetti concreti, come quelli che stanno sulla superficie terrestre, ma oggetti ideali; di conseguenza non si può mai pretendere di rappresentare materialmente con una figura un oggetto studiato dalla geometria; né si può pretendere di poter concludere un ragionamento geometrico con il solo appoggio della figura che in qualche modo rappresenta gli enti interessati. Platone a questo proposito si esprime molto chiaramente in vari luoghi. E, per venire ad un'epoca più vicina alla nostra, citiamo tra i tanti matematici Cartesio, che distingue due specie di linee: quelle che egli chiama « geometriche » e quelle che egli chiama « meccaniche ». Le prime sono quelle che si conoscono attraverso la loro definizione; le linee « meccaniche » potrebbero con nomenclatura moderna essere chiamate « curve empiriche ».

Orbene Cartesio dice che per quanto riguarda le curve che egli chiama geometriche non è necessaria la precisione nel loro tracciamento, perché le conclusioni che le riguardano possono essere tratte per forza del solo ragionamento, a partire per ipotesi dalle definizioni note.

Invece per le curve che egli chiama « meccaniche » la validità delle conclusioni va di pari passo con la precisione del loro tracciamento, in quanto di tali curve è sconosciuta la definizione e quindi tutto quello che si sa è dato dal disegno.

Pensiamo che meglio non si possa esprimere l'opinione costante dei geometri; opinione che era espressa in modo particolarmente efficace da O. Chisini nella forma paradossale che gli era abituale, dicendo che « ... la geometria è la scienza che insegna a fare ragionamenti giusti sulle figure sbagliate ».

Ripetiamo che questo atteggiamento è stato adottato costantemente dai geometri durante lo sviluppo della loro scienza; a ben guardare esso si presenta come necessario, fino dagli inizi della geometria, per esempio a partire dalle conseguenze di uno dei più antichi teoremi che si conoscano: il teorema di Pitagora. Questo, nel suo enunciato più semplice (suggerito dalla fig. 2), porta a concludere che, dato un quadrato qualsivoglia, il quadrato costruito sulla diagonale ha un'area che è doppia di quella del quadrato originario. Si trae di qui, come conseguenza,

fig. 1

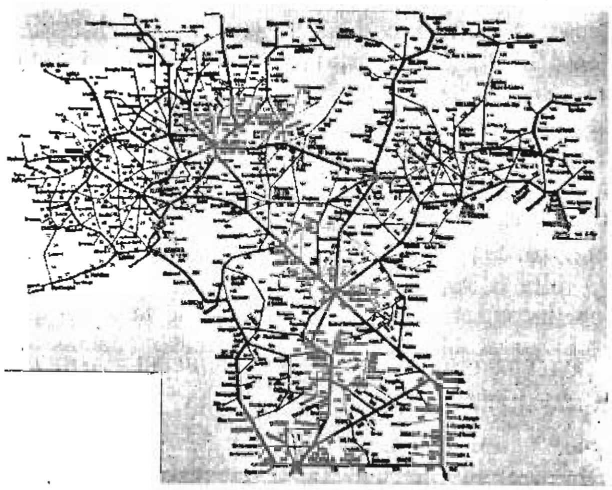


fig. 2

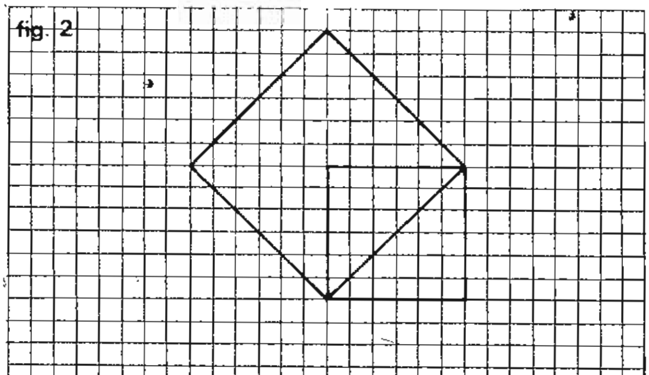


fig. 3

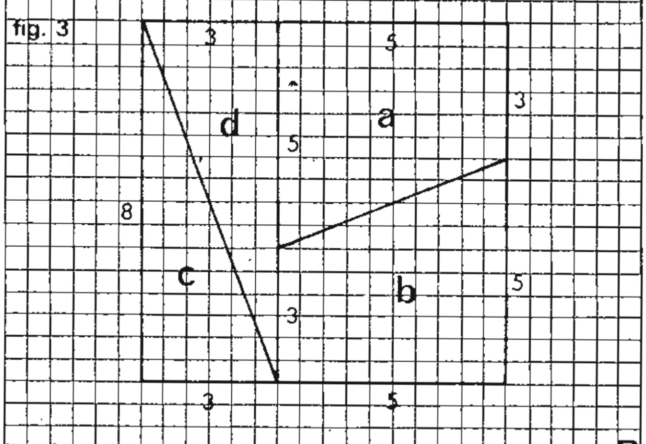
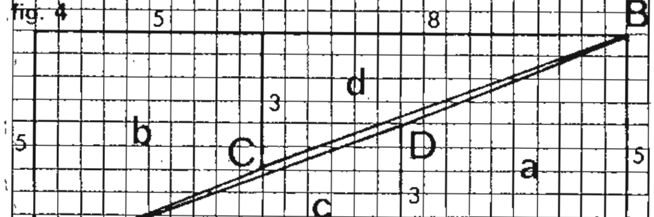


fig. 4



che il lato del quadrato è incommensurabile con la sua diagonale.

Come è noto la dimostrazione di questa proposizione si consegue appoggiandosi sulle proprietà degli interi naturali: decomposizione in fattori primi, sua unicità, proprietà del quadrato di un prodotto. Non sarebbe mai possibile giungere a questa proposizione appoggiandosi soltanto sulla figura; infatti, in altre parole, la incommensurabilità di due segmenti costituisce una affermazione della non esistenza di un « atomo » di spazio. Alla luce delle nostre conoscenze di fisica si potrebbe dire che l'esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro rappresenta piuttosto una conseguenza della estrapolazione fantastica delle nostre esperienze di fisica macroscopica piuttosto che una proprietà sperimentalmente accertabile; al contrario invece — come è noto — le teorie fisiche sarebbero più conciliabili con una quantificazione generalizzata dell'ambiente nel quale si verificano i fenomeni che studiamo. In questo ordine di idee quindi la inesistenza di atomi di spazio e la continuità geometrica sono piuttosto conseguenze del lavoro della nostra fantasia sulle esperienze a livello macroscopico che necessità logiche dell'immagine che la fisica ci dà del mondo.

Non vogliamo proseguire in questa direzione, e vogliamo invece ritornare a considerare qualche altro esempio che dovrebbe confermare l'idea già esposta, che cioè le figure non possono essere il solo fondamento per una conclusione di carattere geometrico.

Tra i tanti esempi possibili presentiamo qui una versione del paradosso che potrebbe essere chiamato del « quadretto in più ». Preso un quadrato di lato 8 (unità di misura qualisivogliano) lo si divida in quattro parti, come è indicato dalla figura nella quale le parti sono indicate con a, b, c, d. Ovviamente nel quadrato considerato sono contenuti $8^2 = 64$ quadrati aventi come lato l'unità di misura scelta. Si ricompongano poi le parti nella maniera indicata dalla fig. 4; si ottiene un rettangolo avente i lati di misure 5 e 13 il quale di conseguenza contiene 65 quadretti.

La domanda che viene posta abitualmente in un gioco di questo tipo è: « Da dove viene il quadretto in più? ». La risposta alla apparente situazione paradossale è data dalla osservazione che i punti indicati in figura con A, B, C, D non appartengono alla medesima retta, anzi sono i vertici di un parallelogrammo non degenere, il quale ha appunto un'area uguale a quella del quadretto unitario; pertanto il rettangolo della figura 4 non è composto soltanto dalle quattro parti a, b, c, d che provengono dal quadrato d'origine, ma da queste e anche dal parallelogrammo che abbiamo nominato.

È facile verificare che i tre punti A, D, B non sono allineati calcolando per es. le tangenti degli angoli che le rette AD e DB formano con il lato lungo del rettangolo.

Indicate con m ed m' le tangenti degli angoli formati con la orizzontale dalla retta AD e DB rispettivamente, si ha

$$m = 3/8 \quad ; \quad m' = 2/5$$

e la tangente dell'angolo α formato in D dalle due rette è data dalla nota formula di trigonometria

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{2}{5} - \frac{3}{8}}{1 + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 8}} = \frac{1}{46}$$

È chiaro che in un modello materiale sarebbe molto difficile valutare quest'angolo. D'altra parte sarebbe anche facile divertirsi costruendo degli esempi analoghi nei quali i punti sono ancora « più allineati » (per così dire), cioè nei quali l'angolo formato da due rette che compaiono nella figura sia ancora più piccolo e quindi ancora più difficile da valutarsi ad occhio o — al limite — anche con strumenti.

Riteniamo che questo esempio sia abbastanza interessante perché permette di mettere in evidenza le precauzioni che vanno adottate quando nell'insegnamento della geometria o in generale della matematica si segue un metodo che ricerca la novità ad ogni costo, magari a scapito del senso comune. In particolare oggi, seguendo le idee di chi sostiene che « la geometria non esiste » e che quindi l'insegnamento della geometria nel vecchio senso va sostituito con l'insegnamento di strutture algebriche, si cerca di ottenere l'introduzione alle poche nozioni geometriche necessarie per la vita civile mediante manipolazioni concrete, svincolate da ogni legame con uno sviluppo razionale della teoria.

Sarebbe facile allora escogitare moltissimi paradossi sperimentali analoghi a quello che abbiamo esposto, che confermerebbero la tesi che la geometria esiste ancora ed ha il suo posto nella formazione del discente, naturalmente se insegnata con il giusto metodo e le necessarie precauzioni.

2 - Il giochetto del « quadretto in più » che abbiamo esposto, e le argomentazioni a proposito delle coppie di segmenti incommensurabili, toccano soltanto uno degli aspetti del problema che ci interessa. Nel corso della storia della matematica la critica all'uso delle figure è stata appoggiata anche su considerazioni di didattica e, da parte diversa, sull'ampliamento dell'ambito degli enti di cui si interessa la geometria.

Per quanto riguarda la didattica, vale la pena di ricordare qui l'opinione di K.K.v. Staudt, il quale (a detta dei suoi biografi) non impiegava figure nel suo insegnamento, perché pensava che le figure « bloccassero » i discenti su un caso, o su vari casi particolari, e quindi fossero di ostacolo a che il discente arrivasse alla massima generalità del concetto geometrico. Questa opinione è del resto confermata dal classico libro dello Staudt, *Geometria di posizione*, libro nel quale egli espone metodicamente la geometria proiettiva (di cui egli fu uno dei fondatori) senza una sola figura.

Dobbiamo dire che questa osservazione dello Staudt conserva tutta la sua validità, e che ancora oggi è molto frequente incontrare degli studenti di tutte le età e di tutti i livelli di scuola che sono stati evidentemente « bloccati » su un solo caso dall'abitudine dell'insegnante di collegare ad un determinato concetto sempre una sola figura, e naturalmente dalla propria mancanza di fantasia. In questo ordine di idee pensiamo che i mezzi audiovisivi (nei quali oggi si ripongono tante speranze) possano essere utilmente impiegati per superare questi blocchi, presentando molti casi di realizzazione dello stesso oggetto geometrico, in una quantità che difficilmente potrebbe essere raggiunta di solito dall'insegnante. Naturalmente per ottenere questo scopo occorre che coloro che progettano questi mezzi ausiliari abbiano presente il problema e vogliano e possano risolverlo.

Per quanto riguarda l'ampliamento dell'ambito degli enti di cui si interessa la geometria, il fenomeno ha avuto la sua origine con la geometria analitica. Infatti si potrebbe dire, in modo abbastanza grossolano ed approssimativo, che in origine la geometria analitica ha stabilito un certo parallelismo tra l'algebra del campo reale e la geometria euclidea classica. Tuttavia tale parallelismo è andato via via perdendosi, mentre cresceva la coscienza del fatto che l'ambito nel quale hanno senso le operazioni algebriche richieste dalla risoluzione di molti problemi geometrici, è il campo dei numeri complessi. Ne è seguito che le discrepanze tra i due linguaggi, quello geometrico e quello algebrico, si sono fatte sempre maggiori.

Per chiarire meglio ciò che vorremmo dire, ci limitiamo ad un esempio del tutto elementare, offertoci questa volta dalla precisazione delle diverse relazioni che possono avere tra loro una circonferenza ed una retta.

fig. 5

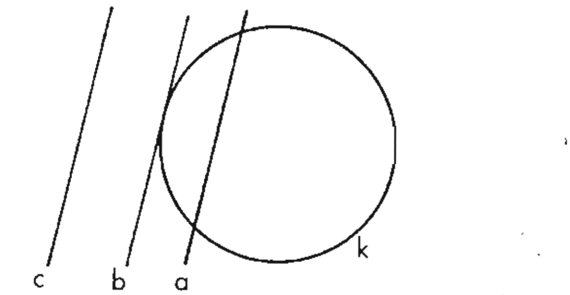
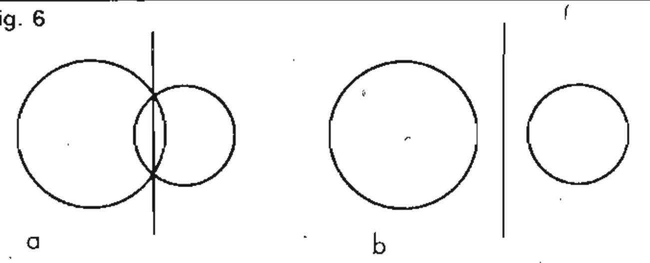


fig. 6



Si consideri una circonferenza k e siano date tre rette a, b, c come in figura 5. Da un punto di vista elementare si potrebbe dire che la retta a è caratterizzata dal fatto di avere due punti in comune con la circonferenza k, la retta b un solo punto, la retta c nessun punto. Tuttavia la comodità di impiego del linguaggio algebrico porta spesso a descrivere le situazioni precedenti dicendo che a ha due punti reali e distinti in comune con k, b due punti coincidenti, c due punti complessi coniugati.

Questo secondo modo di esprimersi ha evidentemente le sue radici nell'abitudine di tradurre il problema geometrico, con le convenzioni della geometria analitica, in un problema algebrico e di impiegare il linguaggio dell'algebra, che è valido in un campo — quello dei numeri complessi — molto più vasto del campo reale, il quale viene ad avere una certa corrispondenza solo con gli enti della geometria tradizionale.

È pertanto possibile considerare la retta c della figura 5 come la congiungente di due punti, che tuttavia dobbiamo rinunciare a rappresentare perché dotati di coordinate complesse coniugate.

Considerazioni analoghe si trovano sviluppate presso molti geometri del secolo XIX, per es. in V. Poncelet e nello stesso Staudt che abbiamo nominato poco fa. Così analogamente al discorso della retta c che congiunge due punti complessi coniugati, si può dare senso al concetto della corda comune a due circonferenze non secantisi, assumendo come tale l'asse radicale del fascio da esse determinato (v. fig. 6a e 6b).

Non si può negare che procedimenti come questi, per quanto ingegnosi, possano ingenerare un certo fastidio per la loro artificiosità, che distrugge in certo senso il vantaggio portato dall'uso del procedimento geometrico, semplice ed intuitivo. Ciò può spiegare l'opinione di chi vorrebbe riservare il maggiore spazio possibile nella didattica alle strutture algebriche, alla cosiddetta « insiemistica »; in una parola a quella che viene abitualmente indicata come « matematica moderna », denominata così forse in contrapposizione alla matematica classica, considerata forse priva di rigore ed in certo senso superata. L'atteggiamento appare tanto più giustificato quando si passi a considerare un ambito ancora più vasto, per es. la teoria degli iperspazi, nel quale la rappresentazione mediante figure è impossibile per principio.

Da ciò che abbiamo detto fin qui parrebbe quindi che l'insegnamento della geometria nel senso classico fosse da condannare, ed in particolare parrebbe che l'uso delle figure sia da evitare, sia perché con le figure non si riesce a rendere tutto ciò che si considera oggi come appartenente all'ambito della geometria, sia perché, anche quando le figure possono essere utilizzate, esse rischiano di « bloccare » il discente, e non possono mai essere considerate come il fondamento della conclusione logica di un discorso rigoroso.

3 - Le considerazioni con le quali abbiamo chiuso il paragrafo precedente inducono a rimeditare sul compito delle figure nell'insegnamento della geometria; compito che noi persistiamo a considerare utile, se svolto con le debite precauzioni.

A questo proposito ci sembra molto equilibrata la posizione di D. Hilbert il quale, nella celebre conferenza pronunciata in occasione del congresso mondiale dei matematici del 1900, espresse l'opinione che le figure siano da considerarsi alla stregua dei simboli algebrici.

Riteniamo che questa opinione sia illuminante e che aiuti a superare varie situazioni paradossali che abbiamo cercato di illustrare finora. Consideriamo per es. l'esperimento immaginario con cui abbiamo cominciato: è chiaro che le cartine dell'orario ferroviario sono rappresentazioni simboliche della situazione dei trasporti. Come ogni insieme di simboli, esse hanno determinati significati in relazione a determinati problemi, e aiutano chi le utilizza secondo le loro leggi ad ottenere ulteriori informazioni e quindi ad ampliare il campo delle proprie conoscenze.

Ciò che si dice a proposito degli intenti pratici di un orario ferroviario o, più generalmente, a proposito di una scienza descrittiva come la geografia, può essere ripetuto a maggior ragione a proposito della geometria. In questo senso si potrebbe dire che Hilbert ha precisato e reso esplicito il pensiero dei classici e di Cartesio.

A titolo di esempio, e per illustrare meglio il nostro pensiero, vorremmo presentare qui un problema che potrebbe essere considerato come un problema di programmazione o di ricerca di strategie, ma che può anche essere enunciato come un problema di geometria.

Si tratta di un problema che si potrebbe chiamare « dei travasi » e che sotto questo aspetto viene spesso presentato dalle rubriche di enigmistica di vari periodici; la soluzione viene abitualmente presentata senza alcuna spiegazione, e si potrebbe dire che il problema viene risolto senza che si sappia bene come e perché.

Va ricordato che una versione di questo problema si trova nel *General trattato di numeri et misure* di Niccolò Tartaglia, ma che esso è probabilmente da farsi risalire ad

fig. 7

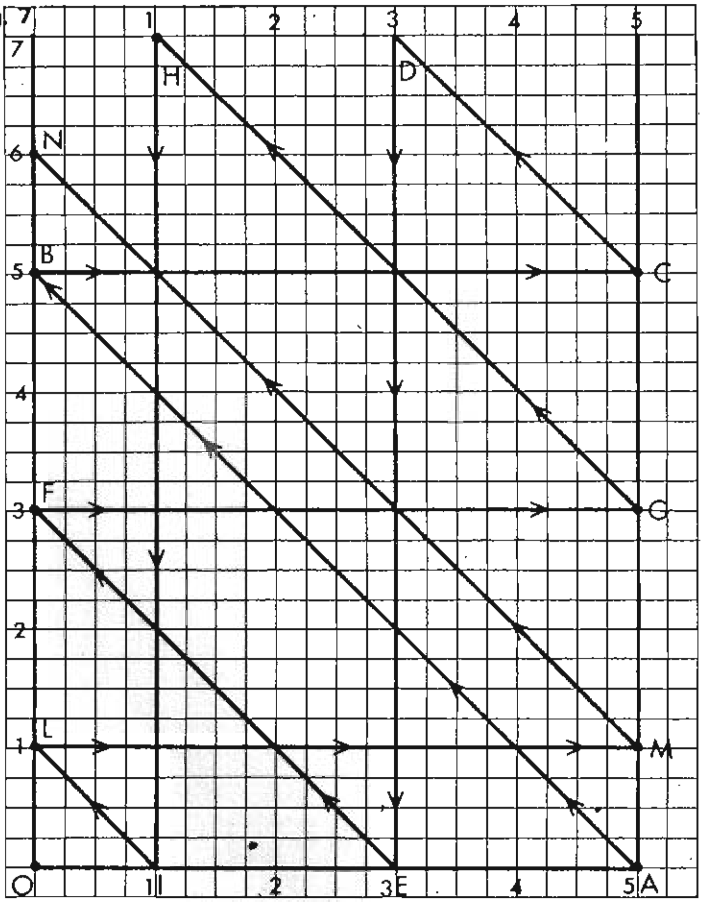


fig. 8

	Recipienti	X	Y	Z
Punto	O	0	0	12
	A	5	0	7
	B	0	5	7
	C	5	5	2
	D	3	7	2
	E	3	0	9
	F	0	3	9
	G	5	3	4
	H	1	7	4
	I	1	0	11
	L	0	1	11
	M	5	1	6
	N	0	6	6

una tradizione più antica. Ci piace presentarlo qui anche perché si tratta di un problema che non può essere risolto con formule o con procedimenti « standard » della matematica; tuttavia noi pensiamo che esso possa venire considerato a pieno diritto come un problema matematico, perché ammette dei procedimenti razionali per giungere alla risposta o per arrivare a concludere della impossibilità della soluzione.

Presentiamo qui la versione classica, lasciando al lettore la facile traduzione in un problema di geometria.

Sono dati tre recipienti, che indicheremo con Z, Y, X; le loro capacità stanno rispettivamente come 12, 7, 5. Il recipiente Z è pieno di un liquido. Si tratta di progettare un numero finito di travasi in modo che alla fine del procedimento si abbiano 6 unità del liquido nel recipiente Y.

La formulazione tradizionale si presta ad una aneddotica pittoresca con molte variazioni che riteniamo inutile presentare.

Qui ci limitiamo a ricordare che non è possibile ottenere direttamente la misura 6 perché non è lecito fare segni sui lati dei recipienti e non esistono altre possibilità tecniche di ottenere misure intermedie.

Orbene la geometria analitica può suggerire un procedimento di soluzione, o meglio di risposta al quesito. Non è infatti detto che esista un procedimento di travasi che conduce al risultato; e si danno con relativa facilità degli esempi in cui tale procedimento non esiste. Basta per es. supporre che le capacità di Z, Y, X siano tutte multiple di una medesima quantità (per es. siano 12, 8, 4 rispettivamente) e che si richieda come risultato finale una quantità di liquido rappresentata da un numero primo con il divisore comune (per es. 5 nei casi presentati). Allora si dimostra abbastanza facilmente che non esiste procedimento di travasi che conduca al risultato. Un procedimento che conduce alla soluzione può essere illustrato dal diagramma cartesiano della fig. 7.

In ascisse sono riportate le quantità di liquido contenute nel recipiente X (al massimo 5), in ordinate le quantità contenute in Y (al massimo 7).

Le quantità contenute in Z si ottengono chiaramente per differenza; le linee rette inclinate di 45° rispetto agli assi sono luoghi di punti in cui la somma dell'ascissa e della ordinata è costante; pertanto luoghi di punti che corrispondono a situazioni in cui non varia la quantità di liquido contenuta nel recipiente Z.

Sulla figura la spezzata avente i vertici in O, A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N indica chiaramente la successione di operazioni che viene presa in considerazione e che conduce al risultato. Essa corrisponde alla successione di stati della fig. 8.

In questo caso sarebbe difficile distinguere il compito della figura nel procedimento. Sarebbe cioè difficile precisare come la figura può venire intesa come un simbolo, nella linea della frase di Hilbert di cui abbiamo detto. Si potrebbe fare un tentativo enunciando le regole seguenti:

a) Si prendono in considerazione soltanto 24 punti, situati in posizioni fronteggiantisi lungo i lati opposti di un rettangolo, a distanze uguali tra loro.

b) Si prendono in considerazione soltanto tre specie di segmenti: quelli paralleli al primo lato del rettangolo, quelli paralleli al secondo e quelli a 45° con i lati.

c) Una poligonale orientata (che simbolizza un procedimento che porta da una situazione possibile ad un'altra pure possibile) può avere i suoi lati paralleli ai segmenti delle tre classi ammesse e può avere come vertici soltanto dei punti ammessi.

d) Un lato della poligonale che parte da un lato del rettangolo non può terminare che su un altro lato del rettangolo stesso.

È ovvio che la figura permette di ricercare molto facilmente i procedimenti, perché la ricerca di uno di questi viene ricondotta alla ricerca di una poligonale che sia tracciata rispettando le regole enunciate e partendo da O abbia un vertice in N.

Tuttavia non si può escludere che si possa giungere al risultato considerato senza la utilizzazione di figure o di diagrammi.

E qui vorremmo fare qualche osservazione a proposito della opinione di Hilbert di cui abbiamo detto. Anzitutto vorremmo dire che se si considerano le figure come dei simboli, alla stessa stregua dei simboli dell'algebra, allora non si può costringere nessuno ad impiegare certi simboli piuttosto che certi altri, così come non si può dimostrare che certi particolari simboli debbono necessariamente essere utilizzati.

La questione che riguarda la utilizzazione o meno delle figure in geometria è dunque una questione di gusto e di opportunità; ma allora proprio in questo ordine di idee vorremmo che nell'insegnamento della geometria gli insegnanti non abbandonassero l'impiego delle figure, per non trascurare l'apporto della fantasia nella soluzione dei problemi matematici e nella formulazione stessa delle idee matematiche; ma vorremmo anche che l'insegnante non trascurasse di mettere in guardia gli allievi a proposito dei limiti del simbolismo adottato. Simbolismo che come ogni altro (naturale o artificiale) non arriva mai a dare tutta la verità, ma deve essere dominato e posseduto criticamente per poter dare tutto l'apporto possibile alla conoscenza ed alla maturazione dell'allievo.

(*segue da pag.* 5)

(Bettini), o nella Valpolicella, nel parco naturale del Baldo e nell'anfiteatro morenico del Garda ove gli alunni si fanno guida ai loro stessi parenti (Scudellari), o in una spopolata valletta presso Firenze (Ranfagni e Olivieri Passeri); talvolta l'itinerario di scoperta è in un museo, come a Verona o a Firenze, ove è avviata una interessante sezione botanica didattica diretta dal dott. Moggi (relazione Mancini).

I migliori risultati son quelli ottenuti da più insegnanti che si son messi assieme per un'esplorazione congiunta dell'ambiente naturale e umano, geografico e storico negli aspetti scientifici e in pari tempo economici e sociali; si fa strada un nuovo modo di insegnare, dove le materie cedono il posto ai problemi (Barone e Ginetti, Barbieri, Coturri Marchesini, Modone). I ragazzi son sollecitati a raccogliere dati, classificare, misurare, confrontare, riferire attraverso il giornale da essi stessi realizzato (Orlando) o il libro di testo originale scritto da loro stessi (Modone). Anche il discorso matematico (Renzetti Bottini) e quello del laboratorio chimico (Lerda) si animano di interesse se riferiti alla realtà ambientale.

L'incontro di Pisa è una tappa: dalla nuova logica informatica alla psicologia dei ragazzi non c'è un varco invalicabile: mille legami fanno emergere la purezza del discorso formale dalle analogie, dalle induzioni, dalla comprensione dei rapporti. L'empirismo va ciecamente a tastoni, ma l'esperienza penetrata di ragione è matrice della scienza fin dai suoi elementi.